O. Schnürer, L. S. Krapp
Sommersemester 2020

Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Blatt 7

Abgabe von: Mein Name
Tutor(in): Mein Lieblingstutor

1	2	3	4	Σ

Allgemeiner Hinweis: Für die Bearbeitung dieses Übungsblatts werden alle Resultate bis einschließlich Beispiel 5.57 vorausgesetzt. Freiwillige Zusatzaufgaben sind mit einem * gekennzeichnet. Alle Aussagen sind stets zu beweisen.

Aufgabe 7.1 (Integration) **[1 + 1 + 1 + 1 Punkte]**
Bestimmen Sie:

(a) $\displaystyle\int\limits_I \frac{18e^{3x}+15e^{2x}-4e^x}{(3e^x+1)^2\cdot(e^x-2)}\,dx$, $I=\left[\log\left(\frac{8}{3}\right),\log(3)\right]$.

(b) $\displaystyle\int\limits_0^\infty x^3\cdot e^{-x^2}\,dx$.

(c) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2)\cdot|t|\,dt$.

(d) $\displaystyle\int \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,d\theta$.

Lösung:

(a) Wir substitutieren $u=e^x$ und erhalten mit $\frac{du}{dx}=u$ sowie Aufgabe 4.1 (i) folgendes unbestimmtes Integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{18e^{3x}+15e^{2x}-4e^x}{(3e^x+1)^2\cdot(e^x-2)}\,dx &= \int \frac{u^2+15u-4}{(3u+1)^2\cdot(u-2)}\,du\\ &= \int\left(\frac{\frac{1}{3}}{\left(u+\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{2}{u-2}\right)du\\ &= \frac{-\frac{1}{3}}{\left(u+\frac{1}{3}\right)}+2\log|u-2|+c\\ &= \frac{-\frac{1}{3}}{\left(e^x+\frac{1}{3}\right)}+2\log|e^x-2|+c,\quad c\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Einsetzen der Grenzen[1] liefert

[1] In einer vorherigen Version war fälschlicherweise als untere Grenze log(2/3) angegeben.

$$\int_I \frac{18e^{3x}+15e^{2x}-4e^x}{(3e^x+1)^2\cdot(e^x-2)}\,dx = \frac{-\frac{1}{3}}{\left(3+\frac{1}{3}\right)} + 2\log|3-2| + \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{8}{3}+\frac{1}{3}\right)} - 2\log\left|\frac{8}{3}-2\right|$$
$$= \frac{1}{90} - 2\log\left(\frac{2}{3}\right).$$

(b) Durch partielles Integrieren erhalten wir folgendes unbestimmtes Integral:

$$\int x^2\cdot xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-x^2} + \int xe^{-x^2}\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-x^2} - \frac{1}{2}e^{-x^2} + c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

Wir erhalten das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x^3e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot e^{-a^2} - \frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}\cdot 0^2\cdot e^{-0^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

(c)

$$\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2)\cdot|t|\,dt = -\int_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{0} \cos(t^2)\cdot t\,dt + \int_0^{\sqrt{\pi}} \cos(t^2)\cdot t\,dt$$
$$= -\left[\frac{1}{2}\sin(t^2)\right]_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{0} + \left[\frac{1}{2}\sin(t^2)\right]_0^{\sqrt{\pi}}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

(d) Patielles Integrieren liefert:

$$\int \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \sin^2(\theta) - \int \cos(\theta)\cdot\sin(\theta)\,d\theta.$$

Wir können nun $\int\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,d\theta$ auf beiden Seiten addieren und durch 2 teilen, um

$$\int \sin(\theta)\cdot\cos(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\sin^2(\theta) + c, \quad c\in\mathbb{R}$$

zu erhalten. (Letzteres lässt sich auch als $\frac{1}{2}(-\cos^2(\theta)+1)+c$ schreiben.)

Aufgabe 7.2 (Integralidentität) **[4 Punkte]**

Sei $f\in C^0(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass für alle $x\in\mathbb{R}$ die Identität

$$\int_0^x f(t)(x-t)\,dt = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du.$$

gilt.

Lösung: Setze

$$g(x) = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)t\,dt$$

und

$$h(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^u f(t)\,dt \right) du.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir

$$g'(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt + xf(x) - f(x)x = \int\limits_0^x f(t)\,dt$$

und

$$h'(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt.$$

Wir haben also $D(g-h)(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass $g-h$ eine konstante Funktion ist. Wegen

$$g(0) - h(0) = 0 - 0 = 0$$

folgt schon $g - h = 0$, also $g = h$, wie gewünscht.

Aufgabe 7.3 (Integralungleichung) **[4 + 2* Punkte]**

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f \in C^1([a,b])$ mit $f(a) = 0$ und $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Beweisen Sie:

$$\int\limits_a^b |ff'| \leq \frac{b-a}{2} \int\limits_a^b (f')^2.$$

(Hinweis: Wenden Sie die Höldersche Ungleichung auf $1 \cdot f'$ an.)

(ii)* Beweisen Sie, dass die obige Ungleichung auch ohne die Annahme $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ richtig bleibt.

Lösung:

(i) Bemerke zunächst, dass f monoton wächst und daher $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Die Höldersche Ungleichung für $p = q = \frac{1}{2}$ gibt uns

$$\int_a^b 1 \cdot f' \leq \left(\int_a^b 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f')^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

also

$$f^2(b) = (f(b) - f(a))^2 = \left(\int_a^b f' \right)^2 \leq (b-a) \cdot \int_a^b (f')^2$$

Es genügt nun

$$2 \int_a^b ff' \leq f^2(b)$$

zu zeigen. Bemerke hierzu, dass $D(f^2) = 2ff'$ ist. Daraus folgt

$$2 \int_a^b ff' = \int_a^b D(f^2) = f^2(b) - f^2(a) = f^2(b),$$

wie gewünscht.

(ii) Betrachte die Funktion

$$g(x) = \int_a^x |f'(t)|\,dt.$$

für $x \in [a,b]$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist g stetig differenzierbar mit $g' = |f|$. Weiterhin ist $g(a) = 0$. Daher erfüllt g alle Voraussetzungen aus Aufgabenteil (i) und wir erhalten

$$\int_a^b |gg'| \leq \frac{b-a}{2}\int_a^b (g')^2.$$

Die rechte Seite ist gleich

$$\frac{b-a}{2}\int_a^b |f'|^2 = \frac{b-a}{2}\int_a^b (f')^2.$$

Für die linke Seite erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)f'(x)|\,dx &= \int_a^b \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right| |f'(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)|\,dt\right) |f'(x)|\,dx \\ &= \int_a^b g(x)g'(x)\,dx.\end{aligned}$$

Diese gibt uns das gewünschte Ergebnis.

Aufgabe 7.4 (Schnell oszillierende Funktionen) **[4 Punkte]**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f \in R([a,b],\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin(kx)\,dx = 0.$$

(Hinweis: Betrachte Sie zunächst den Fall, dass f eine Treppenfunktion ist.)

Lösung: Sei $T\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion:

$$T = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\chi_{[x_i,x_{i+1})} + c_n\chi_{\{x_n\}}$$

für $c_i \in \mathbb{R}$ und eine Partition $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $[a,b]$. Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_{>0}$:

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin(kx)dx\right| = \left|\left[-\tfrac{1}{k}\cos(kx)\right]_\alpha^\beta\right| = \tfrac{1}{k}\left|\cos(k\beta) - \cos(k\alpha)\right| \leq \tfrac{2}{k}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b T(x)\sin(kx)\,dx\right| &= \left|\int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\chi_{[x_i,x_{i+1})} + c_n\chi_{\{x_n\}}\right)\sin(kx)\,dx\right| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} c_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(kx)\,dx\right| \\ &\leq \frac{2}{k}\sum_{i=0}^{n-1} c_i \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.\end{aligned}$$

Sei nun $f \in R([a,b])$. Nach Definition gibt es für $\varepsilon > 0$ eine Partition $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a,b]$, sodass $\sigma(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Definiere die Treppenfunktion

$$T(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\chi_{[x_i, x_{i+1})}(x)$$

für $x \in [a,b)$ und $T(b) = f(x_{n-1})$. Es gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x) - T(x))\sin(kx)\,dx\right| + \left|\int_a^b T(x)\sin(kx)\,dx\right|.$$

Der zweite Term geht gegen Null für $k \to \infty$. Für den ersten Term erhalten wir

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b (f(x) - T(x))\sin(kx)\,dx\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (f(x) - f(x_i))\sin(kx)\,dx\right| \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - f(x_i)| \cdot 1\,dx \\ &\le \sum_{i=0}^{n-1} \operatorname{osc} f|_{[x_i, x_{i+1}]}\, |x_{i+1} - x_i| \\ &= \sigma(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}$

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Abgabe: Bis **Freitag, 05. Juni 2020, 09:54 Uhr**, direkt an die Tutorin / den Tutor. Wir bitten die allgemeinen Hinweise zur Abgabe von Lösungen (siehe Homepage) zu beachten.